Électromagnétisme – Chapitre 2

Électrostatique – TD

Exercice 1 : Applications du théorème de Gauss

On considère d'abord un cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss, puis représenter son évolution.

On considère maintenant un plan infini (xOy) portant une densité surfacique de charge uniforme σ.

2. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss, puis représenter son évolution.

Exercice 2 : Analogie avec la gravitation

1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F_{\text{é}}}$ exercée par une charge ponctuelle q_0 située en O sur une charge ponctuelle q située en M.

2. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{g}}}$ exercée par une masse ponctuelle m_0 située en O sur une masse ponctuelle m située en M.

Comme ces deux forces ont des expressions similaires, on peut établir une analogie entre ces domaines.

3. Déterminer la constante analogue à la permittivité diélectrique du vide ε_0 dans le domaine de la gravitation.

De façon analogue au champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$, on définit le champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la masse m_0 tel que :

$$\overrightarrow{F_{\text{g}}} = m\,\vec{g}(M).$$

4. En déduire un théorème analogue au théorème de Gauss dans le domaine de la gravitation.

5. À l'aide de ce théorème, déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ en tout point de l'espace créé par une planète que l'on assimile à une boule de rayon R centrée en O et de masse volumique uniforme ρ.

Exercice 3 : Champ et potentiel sur un axe présentant des charges

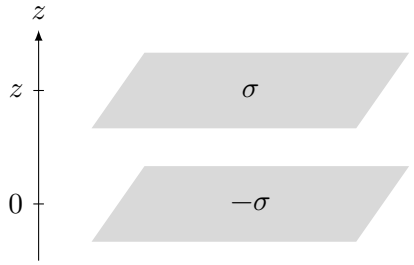
On considère un axe (Ox) sur lequel est situé une charge $Q_1 = 3\,q$ à l'abscisse $x = 0$ et une charge $Q_2 = -q$ à l'abscisse $x = a$, avec $a > 0$.

1. Déterminer les positions sur l'axe où le potentiel électrostatique s'annule, sachant que celui-ci s'annule également à l'infini.

2. Déterminer les positions sur l'axe où le champ électrostatique s'annule.

Exercice 4 : Bilan d'énergie dans un condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures de surface S et séparées par une distance z petite devant la taille des armatures, comme schématisé ci-dessous.



L'armature inférieure, fixée en $z = 0$, possède une densité surfacique de charge $-\sigma$ et créé un champ électrostatique qui s'exprime :

$$\overrightarrow{E_0}(M) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}.$$

L'armature supérieure est mobile, elle possède une densité surfacique de charge σ.

1. Déterminer la force électrostatique $\overrightarrow{F}_{\text{él}}$ exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure.

L'armature supérieure est initialement à la position $z = 0$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur est alors nulle. Un opérateur exerce une force $\overrightarrow{F}_{\text{op}}$ sur l'armature supérieure pour l'amener jusqu'à l'altitude z. On suppose que le déplacement est quasi-statique, et que la densité surfacique de charge des deux armatures reste inchangée.

2. Déterminer le travail de la force exercée par l'opérateur pour écarter les deux armatures.

3. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur plan en fonction de sa capacité C et de la charge q portée par l'une de ses armatures.

4. Déterminer l'expression de la capacité C de ce condensateur plan.

Exercice 5 : Boule chargée non uniformément

On considère une boule de rayon R et de centre O dans le vide. Pour $r \leqslant R$, elle présente une distribution de charges volumique non uniforme qui s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec ρ_0 une constante.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

1. Déterminer l'expression de la charge totale Q portée par la boule.

2. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M de l'espace en fonction de la charge Q.

3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point M de l'espace, sachant que celui-ci est nul à l'infini.

Exercice 6 : Champ créé par un disque au voisinage de son axe

On considère un disque de centre O, de rayon R et d'axe (Oz) portant une distribution surfacique de charge uniforme σ. On souhaite déterminer le champ électrostatique créé par ce disque au voisinage de son axe.

On s'intéresse tout d'abord au champ électrostatique $\overrightarrow{E}_{\text{axe}}(M)$ créé en un point M de côte $z > 0$ situé sur l'axe (Oz).

1. Exprimer le champ électrostatique $\mathrm{d}\overrightarrow{E}_{\text{axe}}(M)$ créé par une surface $\mathrm{d}S$ du disque située en un point $P(r, \theta, 0)$ repéré par ses coordonnées cylindriques.

2. En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}_{\text{axe}}(M)$ créé par le disque sur l'axe (Oz).

On s'intéresse maintenant au champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé en un point $M(r, \theta, z > 0)$ situé au voisinage de l'axe (Oz).

3. En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz), de petit rayon r et contenu entre les côtes z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que la composante radiale du champ électrostatique vérifie :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2}\,\frac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}$$

en supposant que la composante $E_z(M)$ est égale à celle déterminée précédemment sur l'axe (Oz).

4. En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par le disque au voisinage de l'axe (Oz).